Videnskabsteoretiske metoder i matematik

Den rene matematik: Den aksiomatisk-deduktive metode

Den rene matematik handler om at konstruere et system af matematiske ”regler” og udlede sammenhænge indenfor disse systemer.
Formålet med at arbejde med den rene matematik, kan være at udvikle redskaber til gavn i den anvendte matematik, men også at tillære sig den matematiske tankegang, herunder at kunne gennemskue om påståede logiske argumenter er gyldige, og opbygge en matematisk modenhed, der ligger til grund for den dannelse der skal ske i faget.
Den rene matematik er opbygget af definitioner af hvad vi mener når vi siger noget bestemt indenfor matematik, og fra disse definitioner kan vi udvikle såkaldte sætninger, som siger noget om sammenhænge mellem de definitioner vi har lavet. Den rene matematik bygger på en streng argumentation. Sætninger skal bevises før vi kan bruge dem som grundlag for nye sætninger.

Definitioner

En definition indfører et nyt begreb ved at forklare hvordan det er opbygget af enklere størrelser.
En definition kan diskuteres men ikke bevises.

Sætninger

Sætninger er udsagn om sammenhænge mellem definerede begreber.
Visse sætninger bevises ikke, de er **grundsætninger/aksiomer**.
Sætninger kaldes også for *påstande*.

Beviser

Et bevis er et argument for at en sætning er sand. I beviset bruges definitioner samt tidligere beviste sætninger og grundsætninger/aksiomer.

Argumentet har form af en kæde eller et træ hvor hvert led følger af de foregående.

Man kan ikke bevise en sætning alene gennem eksempler eller tegninger.

Bevisformer:

Bevis ved deduktion:
Deduktion er i sproglig argumentation og filosofi en logisk gyldig slutningsform, hvor konklusionen *nødvendigvis* følger af præmisserne.

Direkte bevis: Antag, at de nødvendige forudsætninger A i sætningen gælder. Konkluder gennem et antal skridt at B gælder. $A \Rightarrow \cdots \Rightarrow B$.

- Direkte bevis: Antag ....a .... og slut kæden eller nå roden med .... b....
  - Når vi skal vise formlerne for a og b i lineær, eksponentiel og potensfunktioner.

    - Løsning af to ligninger med to ubekendte (kan fx løses ved substitutionsmetoden eller ved lige store koefficienters metode)
    - Den samme sætning kan vises vha. direkte beviser, men med forskellig fremgangsmåde.

Desuden findes følgende beviser ved deduktion, men de bruges sjældent i undervisningen.

Bevis med modstrid: Antag, at de nødvendige forudsætninger A i sætningen gælder. Antag herudover at det modsatte af B gælder. Nå gennem et antal skridt frem til en modstrid (et falsk udsagn). Konkluder at hvis A gælder, må B også gælde.

- Bevis ved modstrid: Antag ....a.... og det modsatte af ....b.... og vis at det fører frem til en modstrid (et falsk udsagn).
    - Bevis for at når en funktion er voksende, er den omvendte funktion også voksende.
    - Beviser indenfor "talteori", som eleven kan støde på i forbindelse med SRP.
- Bevis ved kontraposition: Antag det modsatte af .... b.... og vis det modsatte af ...a....
    - Beviser indenfor "talteori", som eleven kan støde på i forbindelse med SRP.

Bevis ved induktion:
Vi starter med at vise sætningen for de første skridt (fx n=1, n=2, n=3). Herefter laver vi induktionsskridtet: vi antager at sætningen gælder for n og viser derefter at sætningen gælder for n+1. Vi kan så konkludere at det gælder for alle n.

- Beviset for differentialkvotienten for x^n ved brug af tre-trins-reglen.
- Bevis for eksponentialfunktionen - fx via henfaldsloven.
- Beviser om naturlige tal (fx "Midt i Matematikken" artiklen "At føre et matematisk bevis".)

Anvendt matematik

I anvendt matematik bliver matematikken et redskab til at beskrive, forudsige eller plausibelgøre sammenhænge i omverdenen. Det er her matematikken kommer i spil i forbindelse med andre faglige områder.
Hvor den rene matematik understøtter muligheden for at gennemskue eller konstruere logiske argumenter, som anvendes i samfundet, er det den anvendte matematik der benyttes ude i virksomhederne, når matematik indgår i løsningerne af de problemer der opstår. Det er den anvendte matematik der benyttes, når vi handler en vare, eller laver modeller til f.eks. at forudsige de økonomiske, eller klimarelaterede tilstande vi går i møde. Det er således oftest den anvendte matematik der bruges til at argumentere for, hvorfor vi skal lære matematik.

Når matematikken bruges til at beskrive virkeligheden

- Formelle metoder (Dynamiske modeller - hvor der udledes en sammenhæng mellem observerede størrelser. Eksempelvis regression over datapunkter)
- Syntetiske metoder (Geometrisk konstruktion - fx en udfoldet tegning af en pyramide)
- Numeriske metoder (Simuleringer, diskrete metoder. Eksempelvis simulering af terningekast, i forbindelse med binomial- og normalfordelingen. Numeriske løsninger på et problem vi ikke kan løse eksakt).

Statistiske metoder (Hypotesetest)

Under anvendt matematik hører det at teste hypoteser statistisk.

Hypotese kommer fra græsk. 'hypo' betyder 'under', 'tese' betyder 'sætning' – i betydningen noget som er bevist. Hypotese er altså en ikke vist sætning – en påstand.

Statistisk testning er en del af den arbejdsmetode, der kaldes den *positivistiske videnskabelige metode:* Hver gang en hypotese opstilles, skal man samtidig angive, hvilke observerede data, der fører til forkastelse af hypotesen. At en hypotese ved afprøvning ikke forkastes er ikke det samme som at dens påstand er sand – blot at den p.t. ikke er modsagt. En videnskabelig hypotese behøver selvfølgelig ikke at involvere matematik eller statistik. Hypoteseopstilling kan opfattes langt bredere inden for fagområder som samfunds-, sundheds- eller naturvidenskaberne.

I matematisk statistik betyder hypotese altid en antagelse om en eller flere talstørrelser for de indgående tilfældige størrelser. *Hvad* det er der gælder om fordeling, middelværdi osv. bruger man matematisk deduktion til at vise. Når en fordeling under antagelse af hypotesen er kendt, kan en *beslutningsregel (fx et bestemt signifikansniveau)* angives.