

## Abstract

This study investigates what a map projection is and the problems related to map projection. It examines the geometrical differences between the sphere and the plane, and explains some of the reasons, why a true geometric projection cannot be visualized onto the plane. It expounds the different types of map projection, with focus on Archimedes' cylindrical equal-area projection. The paper analyses the fact that Archimedes' projection is an equal-area projection and it investigates the negative and positive implications to the projection. The results shows that the curvature of the earth does it quite impossible to made the true geometrical projection without any advantages and disadvantages. It is shown with the analysis of Archimedes' projection that even though its area is equal, it is not the ideal projection, because the ideal projection does not exists.

## Indholdsfortegnelse

Abstract .....	1
Indledning.....	3
Introduktion til kortprojektioner .....	4
Sfærisk geometri.....	4
Storcirkler .....	4
Sætning 1.....	5
Bevis.....	5
Sætning 2.....	6
Bevis.....	6
Sætning 3.....	7
Bevis.....	7
Kortprojektioner .....	7
Planprojektioner.....	8
Cylinderprojektioner.....	8
Kegleprojektioner .....	9
Sfæriske koordinater .....	9
Archimedes' arealtro cylinderprojektion .....	10
Sætning 4.....	11
Bevis.....	11
Konklusion .....	15
Litteraturliste.....	16
Bøger: .....	16
Internet:.....	16

## Indledning

Bladrer man igennem et atlas, ses det, at der findes en række forskellige kort, som afbilder forskellige dele af Jorden. Selvom nogle af kortene afbilder den samme del, kan de alligevel se vidt forskellige ud. På nogle af kortene er områderne lange og smalle, mens på andre af kortene er tilsvarende områder korte og brede. Hvordan kan det være at kortene ikke er ens? Og hvorfor findes der ikke ét kort, som viser ét billede af hele Jorden? Svarende på disse spørgsmål findes grundlæggende i, at Jordens krumninger gør det problematisk at projicere kuglefladen på et plant kort.

Derfor vil jeg, med baggrund i sfærisk geometri, give en forståelse af den fundamentale forskel på kuglefladen og planens geometri. Dette gøres ud fra sammenligningen af arealet af en trekant på kuglefladen og en trekant i planen med udgangspunkt i beviset af formlen til beregning af arealet af en sfærisk trekant.

Ud fra resultaterne fra beviset vil jeg gøre rede for forskellige projektioner, med fokus på Archimedes' arealtro cylinderprojektion og give et bevis derfor. Til sidst vil jeg konkludere, hvad ulemperne med denne projektion er, selvom den er arealtro.

## Introduktion til kortprojektioner

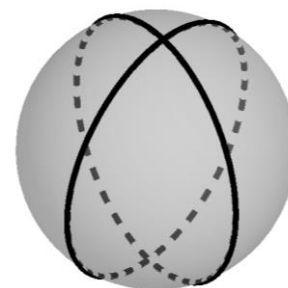
En kortprojektion er en afbildning af Jordens overflade på en plan. Når Jorden projiceres på en plan, betragtes Jorden som en kugle, også selvom den mere korrekte gengivelse af Jorden er en ellipsoide. Dette vil dog ikke blive taget i betragtning. Da Jorden betragtes som en kugle, findes der mange forskellige måder at projicere et kort på<sup>1</sup>. Grunden til dette er, at kuglefladens og planens geometri er forskellige fra hinanden, og der findes derfor ikke det ideelle kort, som kan illustrere Jorden korrekt. Jorden deformeres, når den skal fremstilles på et fladt kort. Derfor må man vælge, hvilket kort der er bedst til det man skal bruge det til. Når man skal vælge det "bedste" kort, vælges der efter nogle bestemte egenskaber, da alle egenskaber ikke kan være repræsenteret i samme kort: Om kortet er areal -, vinkel - og/eller afstandstro<sup>2</sup>. Hvorfor det ideelle kort ikke eksistere vil der blive undersøgt nærmere senere i opgaven.

## Sfærisk geometri

For at finde ud af hvorfor det ideelle kort ikke eksisterer, er det nødvendigt at kigge på forskellen mellem planens og kuglefladens geometri. Dette gøres ved at sammenligne vinkelsummen af en trekant i planen med vinkelsummen af en trekant på kuglefladen. Det er derfor nødvendigt at definere, hvad en trekant på kuglefladen er i forhold til i planen<sup>3</sup>.

## Storcirkler

Der findes ingen rette linjer på kuglefladen på samme måde som i planen. Dette skyldes, at kurver på kuglefladen krummer, og er derfor ikke rette linjer. I planen er den korteste vej mellem to punkter den rette linje, men på kuglefladen vil den korteste vej mellem to punkter skære igennem kuglen, hvilket ikke viser den korteste vej på kuglefladen. Derfor måles den korteste vej mellem to punkter ad kurver på kuglefladen, som kaldes for storcirkler (figur 1)<sup>4</sup>. For at afstanden på kuglefladen kan afbildes præcist i planen, kræver det derfor, at storcirkelstykker bliver afbildet som rette linjestykker i planen.



Figur 1: To storcirkler

En storcirkel fremkommer ved, at en plan med kuglens radius skærer kuglen i dens centrum. Vinklen mellem storcirklerne defineres som vinklerne mellem planerne, der danner dem. Et eksempel på en

<sup>1</sup> Madsen, Frede: kortprojektioner i *Den Store Danske*, Gyldendal.

<http://denstoredanske.dk/index.php?sideId=110374>

<sup>2</sup> Fajstrup, Lisbeth: *Kortprojektioner og forvanskninger* juni 2006 side 5 - 10

<http://docplayer.dk/18286142-Kortprojektioner-og-forvanskninger-lisbeth-fajstrup-institut-for-matematiske-fag-aalborg-universitet.html>

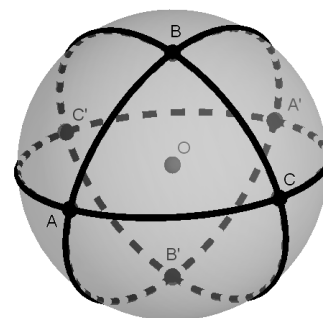
<sup>3</sup> Fajstrup, 2006 side 6

<sup>4</sup> Fajstrup, Lisbeth og Nielsen, Dorthe: *Sfærisk geometri* s. 2

[http://people.math.aau.dk/~fajstrup/UNDERVISNING/GYMNASIE/KORTPROJEKTIONER/Sfaerisk\\_Geometri\\_1009.doc](http://people.math.aau.dk/~fajstrup/UNDERVISNING/GYMNASIE/KORTPROJEKTIONER/Sfaerisk_Geometri_1009.doc)

storcirkel er ækvator, og der går uendeligt mange storcirkler gennem Nord - og Sydpolen<sup>5</sup>. Som det kan ses på figur 1, skærer de to storcirkler hinanden i to punkter og danner tokanter, og disse fire områder er kongruente to og to. Dette kan ikke lade sig gøre i planen, da to rette linjer ikke kan skære hinanden i to punkter. Vi ved, at tre rette linjer i planen, der skærer hinanden, danner en trekant med en vinkelsum på 180°. På samme måde vil 3 storcirkler, der skærer hinanden, danne en såkaldt sfærisk trekant (figur 2), dog ikke med den samme vinkelsum, hvilket vi kommer ind på senere. Hver trekant vil have en kongruent diagonalt modsat trekant og tre forskellige nabotrekanter. To nabotrekanter danner tilsammen en tokant. Det er den korteste cirkelbue mellem to punkter, der definerer den sfæriske afstand. Hvis radius af en kugle vides, kan afstanden både regnes i grader, ud fra kuglens centrum, og i radianer, hvor hele omkredsen målt i radianer er  $2\pi$ .

I det følgende vil vi betragte en kugleflade med radius  $r$  og overfladearealet  $F = 4\pi r^2$ . Vi vil kigge nærmere på arealet af en sfærisk trekant og finde en sammenhæng mellem arealet og vinkelsummen i en sfærisk trekant. På figur 2 er punkterne  $A$ ,  $B$  og  $C$ , og deres modsatte punkter  $A'$ ,  $B'$  og  $C'$ , punkter på kuglefladen, som danner den sfæriske trekant  $ABC$  og den kongruent modsatte trekant  $A'B'C'$ . Før vi kigger på arealet af den sfæriske trekant, defineres arealet af en sfæriske tokant, da en sfærisk tokant er bygget af to sfæriske nabotrekanter. Trekanterne  $ABC$  og  $AC'B$  udgør til sammen en sfærisk tokant<sup>7</sup>.



Figur 2: Sfærisk trekant på kuglefladen

### Sætning 1<sup>8</sup>

Arealet ( $a$ ) af tokanten  $BCB'A$  er:  $a(BCB'A) = \frac{B}{360} F$

hvor  $B$  er gradtallet for vinklen  $B$  og  $F = 4\pi r^2$  er kuglefladens areal

### Bevis

Arealet af kuglefladen er proportionalt med vinkel  $B$ , for hvis  $B = 360$  vil tokantens areal udgøre hele kuglefladen, og arealet vil derfor være  $F$ .

Det ses derfor, at arealet af de to sfæriske trekanter  $ABA'C$  og  $CAC'B$  er tilsvarende:

$$a(ABA'C) = \frac{A}{360} F$$

$$a(CAC'B) = \frac{C}{360} F$$

■

<sup>5</sup> Fajstrup, 2006 side 7

<sup>6</sup> Fajstrup og Nielsen siden 3

<sup>7</sup> Fajstrup og Nielsen side 3-4

<sup>8</sup> Fajstrup, og Nielsen side 4

Ud fra disse udtryk er det muligt at bestemme arealet af en sfærisk trekant.

### Sætning 2<sup>9</sup>

En sfærisk trekant har følgende areal

$$a = (A + B + C - 180) \frac{F}{720}$$

hvor A, B og C er gradtallet for vinklerne og  $F = 4\pi r^2$  er kuglefladens areal

### Bevis

Der tages udgangspunkt i den øverste halvkugle på figur 2, hvor der ses fire sfæriske trekanter

$BAC, BAC', BC'A$  og  $BA'C$  med vinkelspids i B. De må have arealet  $\frac{1}{2}F$  tilsammen, da de udgør halvdelen af kuglefladen. Da netop to trekanter udgør en tokant, gælder der følgende om arealerne af disse trekanter:

$$a(BAC) + a(BAC') = \frac{C}{360}F$$

$$a(BAC) + a(BA'C) = \frac{A}{360}F$$

Og da  $BA'C'$  og  $B'AC$  er kongruente gælder følgende:

$$a(BAC) + a(BA'C') = \frac{B}{360}F$$

Så lægges disse tre udtryk sammen og forkortes

$$\begin{aligned} 3a(BAC) + a(BAC') + a(BA'C) + a(BA'C') &= \frac{C}{360}F + \frac{A}{360}F + \frac{B}{360}F = \frac{F}{360}C + \frac{F}{360}A + \frac{F}{360}B \\ &= (A + B + C) \frac{F}{360} \end{aligned}$$

Da de fire sfæriske tilsammen udgør en halvkugle  $\frac{1}{2}F$  gælder

$$a(BAC) + a(BAC') + a(BA'C) + a(BA'C') = \frac{1}{2}F$$

Af det fås følgende

$$2a(BAC) + \frac{1}{2}F = (A + B + C) \frac{F}{360}$$

⇕

$$2a(BAC) = (A + B + C) \frac{F}{360} - \frac{1}{2}F$$

$\frac{1}{2}$  forlænges med 180

$$2a(BAC) = (A + B + C) \frac{F}{360} - \frac{180}{360}F$$

⇕

---

<sup>9</sup> Fajstrup og Nielsen side 4-5

$$2a(BAC) = (A + B + C) \frac{F}{360} - 180 \frac{F}{360}$$

⇕

$$2a(BAC) = (A + B + C - 180) \frac{F}{360}$$

Arealet af trekanten  $BAC$  er derfor:

$$a(BAC) = (A + B + C - 180) \frac{F}{360} \cdot \frac{1}{2}$$

⇕

$$a(BAC) = (A + B + C - 180) \frac{F}{720}$$

■

Ud fra dette bevis ses det, at vinkelsummen i en sfærisk trekant afhænger af dens areal, og da vinkelsummen i en trekant i planen altid er  $180^\circ$ , kan kuglefladen ikke afbildes præcist i planen. Der kan derfor ikke fremstilles et kort, som både bevarer arealer og vinkler.

Det er dog heller ikke muligt at bevare vinkler og afbilde linjer i rette linjestykker på samme kort. Dette vises ud fra følgende modstridsbevis.

### Sætning 3<sup>10</sup>

Der findes ikke kortprojektioner, hvor storcirkler er afbildet i rette linjer og vinkler samtidig er bevaret.

#### Bevis

Der antages et kort, hvor følgende to krav er opfyldt. Vinkelsummen af den sfærisk trekant bestemmes ved følgende:

$$A + B + C = 180 + \frac{720a}{F}$$

hvor  $A$ ,  $B$  og  $C$  er vinklerne,  $F$  er kuglefladens areal og  $a$  er arealet af den sfæriske trekant. Da vinklerne er bevaret, må vinkelsummen også være det. Det vides at vinkelsummen af en trekant i planen er  $180^\circ$ .

Projektionen kan derfor ikke lade sig gøre, da vinkelsummen i en sfærisk trekant er mere end  $180^\circ$ , med mindre at  $F$  er uendelig eller arealet er lig 0, dette antages dog ikke. Derfor kan dette kort ikke eksistere.

### Kortprojektioner

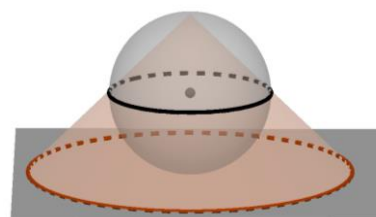
Da det ikke er muligt at fremstille et kort, som både afbilder vinkler, arealer og afstande korrekt, findes der derfor mange forskellige kort, som hver er projiceret på forskellige måder. Der findes tre forskellige typer af kortprojektioner: Plan-, cylinder og kegleprojektioner. Hver af disse tre typer kan også projiceres på forskellige måder, og man vælger metoden ud fra, hvad kortet skal afbilde korrekt.

---

<sup>10</sup> Fajstrup og Nielsen side 11

## Planprojektioner

Når man planprojicerer (azimuthalprojektion), projicere man kuglefladen over på et plan, der tangere i et bestemt punkt, og vælger et sigtepunkt. Da sigtepunktet kan placeres forskelligt, findes der tre forskellige typer af planprojektioner: Den ortografiske, gnomoniske og stereografiske projektion. Hver af disse tre planprojektioner projiceres på hver sin måde, dog alle ned på en plan, hvilket resulterer i, at de bevarer forskellige egenskaber. Den gnomoniske planprojektion bevarer hverken vinkler eller arealer, men den afbilder storcirklerne i rette linjestykker, hvilket bevarer afstandene. Den er derfor ikke så udbredt, men er blevet brugt sammen med Mercatorprojektion (cylinderprojektion). Den stereografiske planprojektion bevarer vinkler. Den ortografiske planprojektion bevarer tilnærmelsesvis arealer men kun i polområderne, og den bliver derfor oftest brugt til afbildning af netop disse områder<sup>11</sup>.



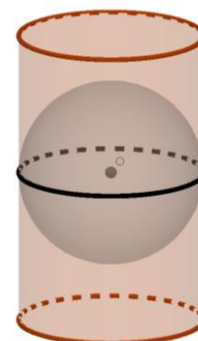
Figur 3: Planprojektion



Figur 4: Den ortografiske planprojektion.  
Taget fra R. Knippers 2009 "Map Projections"  
<http://kartoweb.itc.nl/geometrics/Map%20projections/mappro.html>

## Cylinderprojektioner

Udover at projicere på en plan kan kuglefladen også projiceres ud på en cylinder, som klippes op efter projiceringen, og dermed bliver et kort. Cylinderen tangerer kuglefladen i en storcirkel, og sigtepunktet kan vælges frit. En kortprojektion, hvor sigtepunktet er valgt i centrum, også kaldt centralcylindriske projektioner, er Mercatorprojektion, som bruges i forbindelse med sejlads sammen med den gnomoniske planprojektion. Ved Archimedes' (Lamberts) arealtro cylinderprojektion er sigtepunktet placeret lidt anderledes, hvilket vil blive uddybet senere i forbindelse med beviset om Archimedes' arealtro cylinderprojektion<sup>12</sup>.



Figur 5: Cylinderprojektion

<sup>11</sup> Quiñones, Beatriz m.fl.: *Jorden rundt på flade kort* 1985 side 42 - 47

<sup>12</sup> Quiñones, 1985 side 57

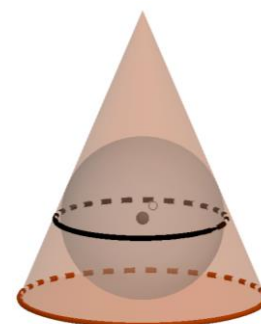


## Kegleprojektioner

Den sidste type er kegleprojektionen, hvor planen, der skal projiceres på, er formet som en kegle og placeres på toppen af kuglefladen<sup>13</sup>. Da kegleprojektioner hverken afbilder afstande, arealer og vinkler, men kun giver et godt billede af et lille områdes kontur, vil vi ikke komme nærmere ind på dem her<sup>14</sup>.



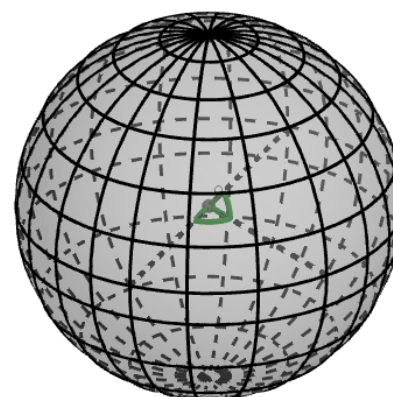
Figur 7: Den simple perspektiv kegleprojektion  
Taget fra R. Knippers 2009 "Map projections"



Figur 6: Kegleprojektion

## Sfæriske koordinater

For at se nærmere på forskellige typer af kortprojektioner kigger vi på, hvordan man definerer et punkt på Jordens overflade. Jorden er inddelt i længde- og breddegrader, som kaldes sfæriske koordinater, og disse er defineret ud fra et tredimensionelt koordinatsystem med akserne  $x, y, z$ . Udover det er de sfæriske koordinater bestemt ud fra nogle specielle storcirkler: Ækvator, som bestemmer breddegraderne, og storcirklen mellem polerne der går igennem Greenwich i London, som bestemmer længdegraderne<sup>15</sup>. Breddegraderne måles ud fra vinklen  $\lambda$  fra Jordens centrum mellem ækvator og punktet på kuglefladen. Breddegraderne bliver angivet efter, hvor mange grader punktet ligger over eller under ækvator. Da graderne ikke betegnes som henholdsvis positive og negative grader, bliver gradtallet efterfulgt af et N for nordlige eller S for sydlige halvkugle. Breddegraderne opgives derfor mellem  $0^\circ$  til  $90^\circ$  N eller  $0^\circ$  til  $90^\circ$  S, hvor ækvator ligger ved  $0^\circ$ . Længdegraderne måles ud fra vinklen  $\varphi$  fra Jordens centrum mellem "Greenwich-storcirklen" og punktet. Længdegraderne går, til forskel fra breddegraderne, mellem østlig og vestlig retning, og bliver derfor betegnet med enten Ø eller V. Derudover er vinkelangivelsen fra  $0^\circ$  til  $180^\circ$ , og intervallet kommer derfor til



Figur 8: Længde- og breddegrader

<sup>13</sup> Fajstrup, 2006 side 21

<sup>14</sup> Quiñones, 1985 side 83

<sup>15</sup> Quiñones, 1985 side 30-31

at være fra  $0^\circ$  til  $180^\circ$  Ø eller V retning<sup>16</sup>. Det sfæriske koordinatsæt bestemmes ved  $(\lambda, \phi)$ , hvilket bruges senere i opgaven til beviset af Archimedes' arealtro projektion.

### Archimedes' arealtro cylinderprojektion

Archimedes' projektion (også kendt under Lambert's projektion) betegnes som den arealbevarende cylinderprojektion, da den, som navnet fortæller, er arealbevarende. Ved en cylinderprojektion forstås, at kuglefladen projiceres på en cylinder, som tangere kuglen. Archimedes' projektion har, til forskel fra andre cylinderprojektioner, en hel akse som sigtepunkt, kuglens diameter, hvor punkter projiceres vandret ud på cylinderen. Archimedes' cylinder tangerer derfor på ækvator. Efter projicering klippes cylinderen op og foldes ud på en plan<sup>17</sup>.

At Archimedes' cylinderprojektion giver et arealtro resultat, kan man umiddelbart hurtigt overbevises om. Han viser selv, at arealet af den krumme overflade på cylinderen er identisk med arealet af kuglefladen<sup>18</sup>. Dette kan vises ud fra et eksempel.

Der tages udgangspunkt i en kugle med radius 1 og en cylinder med tilsvarende radius og en højde på 2.

Kuglefladens areal beskrives med formlen

$$F = 4\pi r^2$$

Og den valgte kugles overflade kan defineres som følgende

$$F = 4\pi \cdot 1^2$$

⇕

$$F = 4\pi$$

Cylinderens krumme overfladeareal beskrives ved formlen

$$O = 2\pi r h$$

Den valgte cylinderens krumme overflade kan på tilsvarende måde defineres som følgende

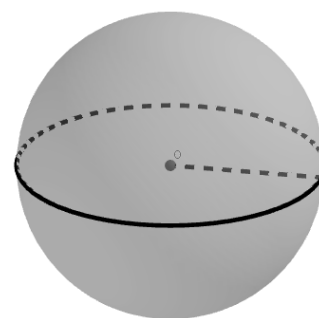
$$O = 2\pi \cdot 1 \cdot 2$$

⇕

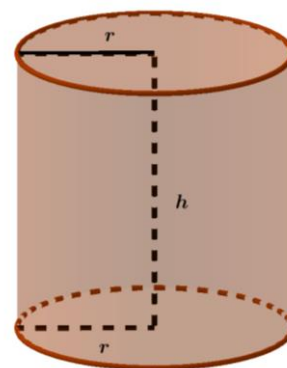
$$O = 2\pi \cdot 2$$

⇕

$$O = 4\pi$$



Figur 9: Kugle:  $F = 4\pi r^2$



Figur 10: Cylinder:  $O = 2\pi r h$

<sup>16</sup> Quiñones, 1985 side 31-31

Fajstrup, 2006 side 13

<sup>17</sup> Fajstrup, 2006 side 19

<sup>18</sup> Larsen, Mogens Esrom: *Peters' atlas* december 1990 side 1

Ud fra dette eksempel ses det, at arealet af kuglefladen er identisk med arealet af cylinderens krumme overflade, når deres fælles radius er 1 og højden på cylinderen er 2. Beviset for at overstående gælder på en kugle med vilkårlige radius, ses i følgende afsnit.

Følgende bevis er konstrueret med udgangspunkt i artiklen "Peters' atlas" fra tidsskriftet KVANT af Mogens Esrom Larsen, med ændring af væsentlige betegnelser og konstruktioner af illustrative figurer.

#### Sætning 4<sup>19</sup>

Et vilkårligt lille rektangels areal på kuglefladen bevares ved projicering på cylinderen.

#### Bevis

Vi betragter et vilkårligt uendeligt lille rektangel på kugleoverfladen med sidelængderne  $\delta x$  og  $\delta y$ , hvor kuglens radius er 1 med breddegradsvinklen  $\lambda$  og længdegradsvinklen  $\varphi$ . Arealet af rektanget på kuglen kan bestemmes til  $a \approx \delta x \cdot \delta y$ , da kuglens krumning er uendelig lille og derfor ikke tages i betragtning.

For at bevise at arealet på kuglefladen er bevaret efter projicering på cylinderen, ses kuglen henholdsvis fra siden og fra oven. Siden  $\delta x$  projiceres  $\alpha$ , og siden  $\delta y$  projiceres  $\beta$  på cylinderen. Disse sider defineres.

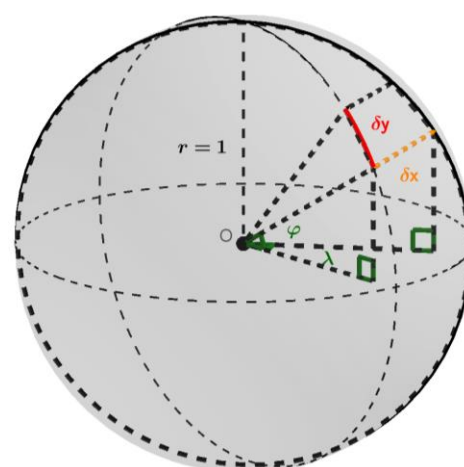
Kuglen betragtes først fra siden i et koordinatsystem for at definere siden  $\alpha$ , og her ses linjestykket  $\delta y$  markeret med rødt og længdegradsvinklen  $\varphi$  fra kuglens centrum til punktet B.

Radius 1 ud fra  $\varphi$  og sidelængderne  $\sin(\varphi)$  og  $\cos(\varphi)$  danner trekanten  $ABC$  (figur 12). På tilsvarende måde bliver trekanten  $A'B'C'$  dannet ud fra siderne  $\delta y$ ,  $\cos(\theta + \varphi) - \cos(\varphi)$  og  $\sin(\theta + \varphi) - \sin(\varphi)$

Der vides følgende om de to trekanter (figur 12)

$$ABC = 180^\circ$$

$$A'B'C' = 180^\circ$$



Figur 11: Rektangel på kuglefladen

<sup>19</sup> Larsen, 1990 side 1-2

Der må gælde følgende om  $ABC$  da  $\angle C = 90^\circ$

$$\angle A + \angle B = 90^\circ$$

Punktet  $B$  tangerer cirklen derfor gælder

$$\angle D = 90^\circ$$

fordi linjestykket  $AB$  er vinkelret på tangenten i punktet  $B$ .

Vi ved at vinkelsummen af  $BDB' = 180^\circ$ , da linjestykket  $CC'$  er en ret linje.

Da  $\angle D = 90^\circ$  gælder det at

$$\angle B + \angle B' = 90^\circ$$

Da vi nu har to udtryk der begge giver  $90^\circ$ , sættes de lig med hinanden.

$$\angle B + \angle B' = 90^\circ$$

$$\angle A + \angle B = 90^\circ$$

$$\angle B + \angle B' = \angle A + \angle B$$

Så trækkes  $\angle B$  fra på begge sider og vi får at

$$\angle B' = \angle A$$

Det gælder derfor også at

$$\angle B = \angle A'$$

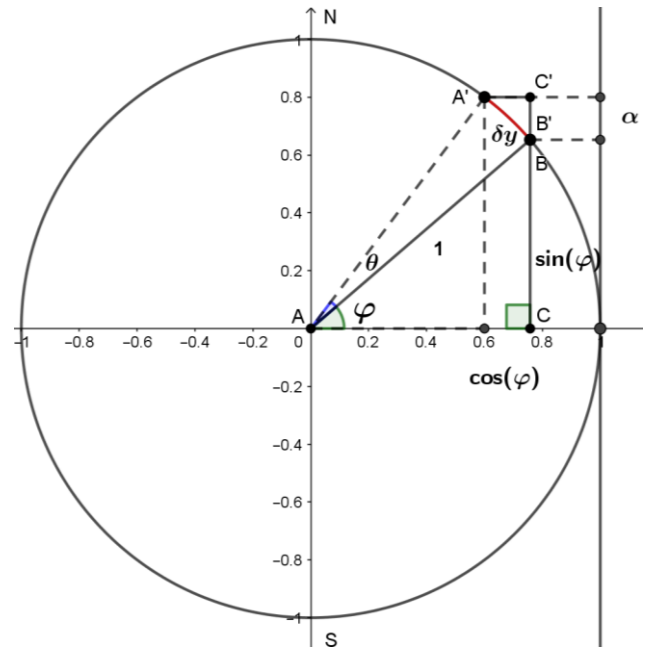
Det fås at de to trekanter er ensvinklede og så er det muligt at finde en forstørrelsesfaktor  $f_1$

$$\frac{\cos(\varphi)}{\alpha} = \frac{1}{\delta y}$$

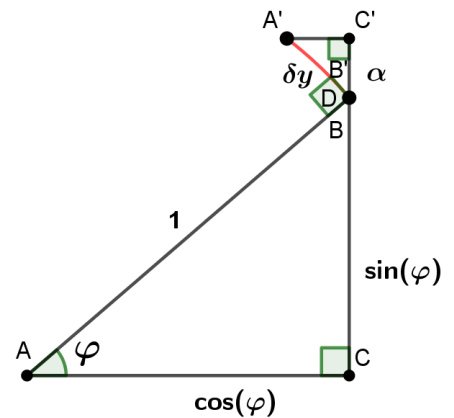
$\Downarrow$

$$\alpha = \delta y \cdot \cos(\varphi)$$

Siden  $\delta y$  er hermed defineret.



Figur 12: Kuglen set fra siden



Figur 13: Udsnit af figur 12

For at definere siden  $\delta x$  betragtes kuglen der efter fra oven, og her ses breddegradsvinklen  $\lambda$  og linjestykket  $\delta x$ .

Siderne fra centrum og ud til cylinderen radius 1 og siden  $\beta$  danner tilsammen trekanten  $EFG$ . Siderne  $\cos(\varphi)$  og siden  $\delta x$  danner trekanten  $E'F'G'$  (figur 15)

Der vides følgende om trekantene  $EFG$  og  $E'F'G'$

$$\angle E = \lambda$$

$$\angle E' = \lambda$$

Da trekanten  $EFG$  har sidelængerne

$$EF = 1$$

$$EG = 1$$

Og trekanten  $E'F'G'$  har sidelængerne

$$E'F' = \cos(\varphi)$$

$$E'G' = \cos(\varphi)$$

Kan begge trekanter antages som ligebenet trekanter, og da de har breddegradsvinklen  $\lambda$  til fælles, fås det at de er ensvinklede.

Da det nu vides at trekantene er ensvinklede, er det muligt at finde en forstørrelsesfaktor  $f_2$

$$\frac{1}{\cos(\varphi)} = \frac{\beta}{\delta x}$$

⇕

$$\beta = \delta x \cdot \frac{1}{\cos(\varphi)} = \frac{\delta x}{\cos(\varphi)}$$

Eftersom vi nu har en definition for henholdsvis siden  $\alpha$  og siden  $\beta$ , er det muligt at bestemme arealet af rektanglet på cylinderen

$$\alpha = \delta y \cdot \cos(\varphi)$$

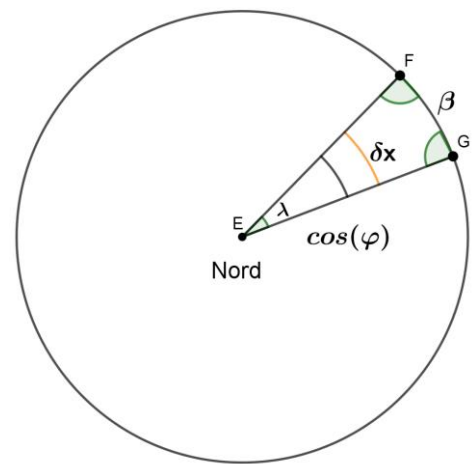
$$\beta = \frac{\delta x}{\cos(\varphi)}$$

Det fås at

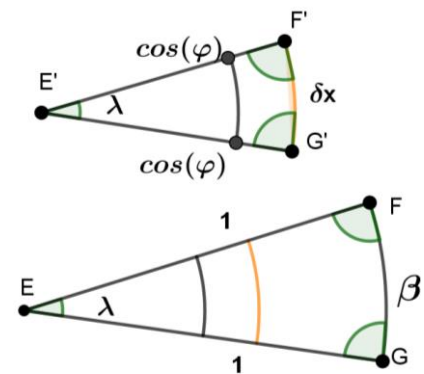
$$\alpha \cdot \beta = \delta y \cdot \cos(\varphi) \cdot \frac{\delta x}{\cos(\varphi)}$$

Det forkortes til følgende

$$\alpha \cdot \beta = \delta y \cdot \delta x$$



Figur 14: Kuglen set fra oven



Figur 15: Udklip af figur 14

Da der tidligere i beviset blev defineret, at arealet af rektanglet på kuglefladen er  $a = \delta y \cdot \delta x$ , kan det konkluderes, at arealet af rektanglet på kuglefladen er identisk med arealet af rektanglet projiceret på cylindererne. Archimedes' projektion er derfor arealtro.

■

Selvom Archimedes' projektion er arealtro, har projektionen også nogle ulemper, da det ikke er muligt at projicere det ideelle kort. Ud fra beviset ses det, at ved projicering vil sidelængden  $\delta x$  bliver forlænget med faktoren  $\frac{1}{\cos(\varphi)}$ , men da sidelængden  $\delta y$  bliver forkortet med faktoren  $\cos(\varphi)$ , gør det ingen forskel for arealet men for afstandene, da bredden bliver forstørret i forhold til længden. På figur 16 ses det at kortet er korrekt ved ækvator men forvrængende ved polerne, og projektionen er derfor sjældent brugt, og den bliver oftest kun brugt til kortlægning af områderne ved ækvator<sup>20</sup>.



Figur 16: Archimedes' arealbevarende cylinderprojektion.  
Taget fra R. Knippers 2009 "Map projections"

---

<sup>20</sup> Larsen, 1990 side 1-2

## Konklusion

Ud fra resultaterne af beviserne om sfærisk geometri kan det konkluderes, at det ikke er muligt at projicere det ideelle kort. Problematikken i at Jorden krummer gør det umuligt at opfylde kravene om at et kort skal være vinkel -, areal - og afstandstro, derfor eksisterer det ideelle kort ikke. Kuglefladens og planens geometri er så forskellig fra hinanden, at Jorden deformeres ved projicering på en plan, selvom der findes forskellige metoder at gøre det på. Der er derfor fremstillet rigtig mange kort, som opfylder hver sine krav, så det er muligt at finde et kort, som opfylder det krav man efterspørg.

Beviset vedrørende Archimedes' projektion viste, at selvom projektionen er arealtro, bliver kuglefladen forvrænget efter projektionen, og landene ser derfor "forkerte" ud i forhold til, hvordan de i virkeligheden ser ud på kuglefladen. Kortene snyder os derfor på forskellige måder alt efter, hvilken projektion der er brugt, og mon dog at der nogensinde bliver fremstillet et kort, der ikke har en lille ukorrekthed et sted.

## Litteraturliste

### Bøger:

Quinones, Beatriz og Andresen, Birgit og Staal, Jimmy (1985) *Jorden rundt på flade kort: En indføring i kortfremstilling*. Nr. 111. I *Tekster fra IMFUFA*. Roskilde Universitetscenter

### Internet:

de la Yncera, Julio: *Dimensions*

[http://dimensions-math.org/Dim\\_regarder\\_E.htm](http://dimensions-math.org/Dim_regarder_E.htm) - set 6. februar 2018

Fajstrup, Lisbeth: *Hvordan man kommer til kort*, 13. januar 2016

<http://blog.math.aau.dk/2016/01/13/hvordan-man-kommer-til-kort/> - set 4. februar 2018

Fajstrup, Lisbeth: *Kortprojektioner og forvanskninger*, juni 2006

<http://docplayer.dk/18286142-Kortprojektioner-og-forvanskninger-lisbeth-fajstrup-institut-for-matematiske-fag-aalborg-universitet.html> - set 4. februar 2018

Fajstrup, Lisbeth og Nielsen, Dorthe: *Sfærisk geometri*

[http://people.math.aau.dk/~fajstrup/UNDERVISNING/GYMNASIE/KORTPROJEKTIONER/Sfaerisk\\_Geometri\\_1009.doc](http://people.math.aau.dk/~fajstrup/UNDERVISNING/GYMNASIE/KORTPROJEKTIONER/Sfaerisk_Geometri_1009.doc) - set d. 5. februar 2018

Knippers, R.: *Map projection* august 2009

<http://kartoweb.itc.nl/geometrics/Map%20projections/mappro.html> - set 5. februar 2018

Larsen, Mogens Esrom: *Peters' atlas* december 1990

<http://www.math.ku.dk/~mel/peter.pdf> - set 3. februar 2018

Madsen, Frede: *Kortprojektioner i Den Store Danske*, Gyldendal.

<http://denstoredanske.dk/index.php?sideId=110374> - set 29. januar 2018

Vildgaard, Josephine Bachmann: *Landkortene snyder dig*, 14. august 2017

<https://www.mm.dk/tjekdet/artikel/landkort-snyder-dig> - set 5. februar 2018