Navn:

Fødselsdato:

Skole:

Fag:

Dato for prøveaflæggelse:

Fag:	Vejleder:
Matematik B	

Opgaveformulering:

Giv en indføring i de komplekse tal samt basale begreber og regneregler for disse. Vis undervejs hvorledes komplekse tal kan afbilledes i et koordinatsystem.

Giv desuden en kort introduktion til komplekse funktioner og talfølger og gør rede for hvordan disse kan bruges til at definere hvilke komplekse tal, der ligger i Mandelbrotmængden.

Forventet omfang: 10-15 sider eksklusive forside, noter og bilag.

Med aflevering i Netprøver bekræfter jeg, at opgavebesvarelsen er udarbejdet af mig. Jeg har ikke anvendt tidligere bedømt arbejde uden henvisning hertil, og opgavebesvarelsen er udfærdiget uden anvendelse af uretmæssig hjælp og uden brug af hjælpemidler, der ikke har været tilladt under prøven.

Resume

I denne opgave vil jeg fordybe mig i emnet komplekse tal, hvor jeg vil etablere regneregler, definerer begreber, vise den komplekse talplan og introducere komplekse funktioner. Som kulminerer til at jeg vil beskæftige mig med fraktaler og herunder specifikt Mandelbrotmængden. Jeg vil både kigge teoretisk, men også visuelt på denne fraktal og dens uendelige dybde.

Indholdsfortegnelse

Indledning 4

Talsystemet 4

Komplekse tal 4

Definition 1.1 4

Eksempel 1.1 5

Definition 1.2 5

Eksempel 1.2 5

Definition 1.3 6

Eksempel 1.3 6

Regneregler for komplekse tal 7

Definition 2.1 7

Eksempel 2.1 7

Definition 2.2 7

Eksempel 2.2 8

Komplekse funktioner 8

Definition 3.1 8

Fraktaler 8

Mandelbrotmængden 9

Eksempel 4.1 10

Sætning 4.1 10

Eksempel 4.2 11

Den visuelle Mandelbrotmængde 12

Konklusion 14

Litteraturliste 15

Indledning

Første gang jeg stødte på fraktaler, var ved en af de utallige Mandelbrot zoom videoer på YouTube. Jeg har altid gerne ville finde ud af hvordan Mandelbrotmængden hænger sammen og hvorfor den er så kompleks som den er. Komplekse tal er nødvendige for at vise den smukke og uendeligt komplekse fraktal Mandelbrotmængden. For at konstruere denne geometriske figur, skal man have kendskab til komplekse tals regneregler, begreber og hvordan man afbilder dem i et koordinatsystem. Den visuelle del er meget imponerende og en spændene tilføjelse til matematikken efter computerens opfindelse.

Talsystemet

Der findes forskellige tal i vores talsystem som vi skal bruge til at forstå de senere introducerede komplekse tal, de tal man skal kende til for at forstå komplekse tal er

[1]Naturlige tal:

$$\mathbb{N}: 1,2,3,4,5$$

De hele tal:

$$\mathbb{Z}: 0,\ 1, -1,\ 2,\ -2,\ 3,\ -3$$

De rationelle tal (brøker) og irrationelle tal:

$$\mathbb{Q}: \frac{1}{2}, \frac{1}{3},\ \frac{1}{4}\ og\ \sqrt{2},\ \pi,\ e$$

Reelle tal:

Alle tal på tallinjen: $\mathbb{R}$

Komplekse tal

Definition 1.1

[2]Den imaginære i enhed kan defineres som:

$$i^2 = -1$$

[1] Carstensen, Jensen: Komplekse tal. Systime 1996: side 7

[2] Adams, Robert 2003

$$\sqrt{-1} = i$$

Da man ikke kan finde roden af en negativt tal er i altså ikke et rigtigt tal. Derefter vil jeg forklare hvad et komplekst tal er. Et komplekst tal tager formen af $a + bi$ hvor $a, b \in \mathbb{R}$

Eksempel 1.1

$$5 + 5i, \frac{1}{6} - \frac{8}{5}i, \pi i$$

Derfor vil jeg gerne refererer til komplekse tal vha. to notationer, i denne opgave vil jeg bruge notationerne $w = a + bi$ og $z = x + yi$ hvor w og z er det samme hvis $a = x$ og $b = y$.

Når som tidligere sagt er $z = x + yi$ et komplekst tal hvor $x, y \in \mathbb{R}$ kan man kalde x den reelle del af ligningen z, det noteres som $Re(z)$. Derfor kan man kalde y for den imaginære del af z hvilket noteres $Im(z)$

Definition 1.2

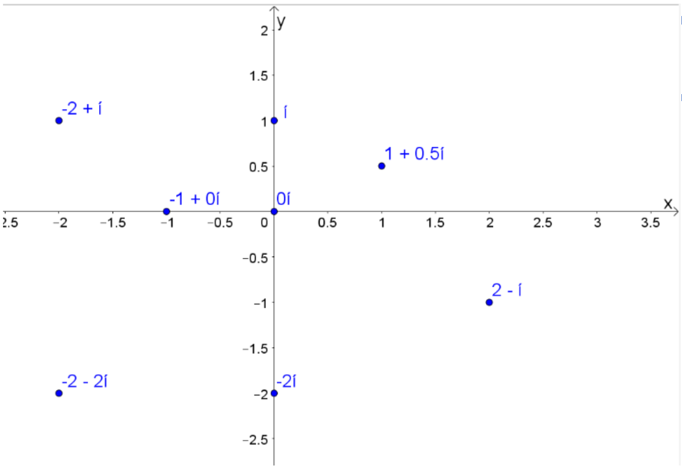
[3] $Re(z) = Re(x + yi) = x, \qquad Im(z) = Im(x + yi) = y$

Eksempel 1.2

$$Re(2 + 5i) = 2 \qquad Im(2 + 5i) = 5$$
$$Re(-4i) = Re(0 - 4i) = 0 \qquad Im(-4i) = Im(0 - 4i) = -4$$
$$Re(10) = Re(10 + 0i) = 10 \qquad Im(10) = Im(10 + 0i) = 0$$

Da komplekse tal består af et tal par (en reel del og en imaginær del) er det ret oplagt at hvis man skal vise dem grafisk, er den nemmeste og mest intuitive måde et koordinatsystem. Hvis vi siger at punktet i koordinatsystemet er repræsenteret ved (x, y) af funktionen $z = x + yi$. I et koordinatsystem hvor komplekse tal indgår, vil origo (0,0) altså være tilsvarene det komplekse tal 0, et andet eksempel kunne være punktet (0,4) som repræsenterer det komplekse tal $4i = 0 + 4i$ eller punktet (2,0) ville så være $2 = 2 + 0i$ (se figur 1.1)

[3] Adams, Robert 2003



Figur 1.1

Definition 1.3

[4]Afstanden fra et komplekst tal til origo kaldes modulus og skrives som

$$|a + bi|$$

Eller

$$|(a, b)|$$

Som ved brug af Pythagoras sætning kan regnes som:

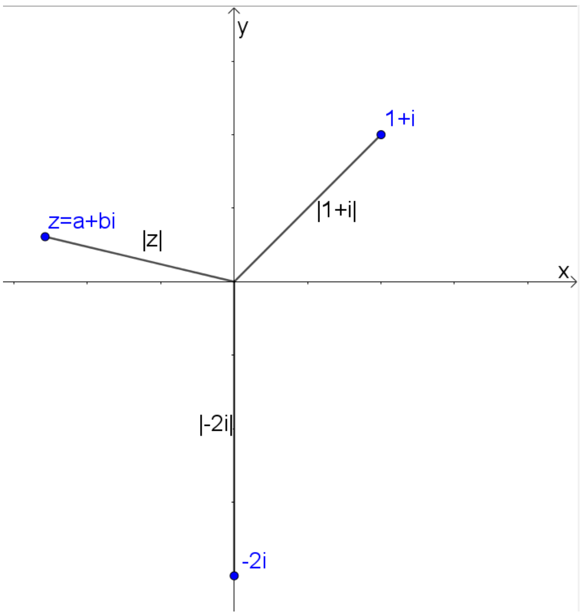
$$|a + bi| = \sqrt{a^2 + (bi)^2}$$

Eksempel 1.3

$$|1 + i|$$

$$|z|$$

$$|-2i|$$



Figur 1.2

---

[4] Adams, Robert 2003

Regneregler for komplekse tal

[5]Ligesom reelle tal kan man finde summen, differensen, produktet og kvotienten af komplekse tal. For det er der nogle regneregler der som udgangspunkt ligner reglerne for reelle tal. Summen og differensen af to komplekse tal regnes på følgende måde:

Definition 2.1

$$w + z = (a + x) + (b + y)i$$
$$w - z = (a - x) + (b - y)i$$

Eksempel 2.1

Hvis $w = 3 + 5i$ og $z = 1 - 2i$ så vil

$$w + z = (3 + 1) + (5 - 2)i = 4 + 3i$$

Og

$$w - z = (3 - 1) + \big(5 - (-2)\big)i = 2 + 7i$$

Når man derimod skal finde produktet af komplekse tal, som man kan bruge til at finde frem til min første definition, altså til at finde roden af et negativt tal. definitionen ser sådan ud:

Definition 2.2

$$w \cdot z = (ax - by) + (ay + bx)i$$

Og hvis man ser på det som koordinater vil definitionen se sådan her ud

$$(a \cdot b) \cdot (x \cdot y) = (ax - by, ay + bx)$$

Denne formel er vigtig da den forklarer hvordan man med komplekse tal kan finde kvadratroden af -1, hvis vi nu tager det komplekse tal i fordi at $Re(i) = 0$ og $Im(i) = 1$ og ganger det med sig selv, altså i^2 får vi:

[5] Carstensen, jens 1996

Eksempel 2.2

$$i \cdot i = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1) + (0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = -1$$

Hvilket også kan skrives som koordinater på den reelle og komplekse talplan

$$(0{,}1) \cdot (0{,}1) = (0 \cdot 0 - 1 \cdot 1, 0 \cdot 1 + 1 \cdot 0) = (-1{,}0)$$

Komplekse funktioner

[6]For at se på Mandelbrotmængden skal man forstå at man også kan lave funktioner med komplekse variabler. En kompleks funktion skal på det helt basale niveau forstås som en funktion hvor, funktionens input z er et komplekst tal og resultatet af funktionen w også er komplekst. Det vil oftest skrives som $z \overset{f(z)}{-} w$

Definition 3.1

Da z består af en imaginær del og en reel del, altså $z = x + yi$ og det samme er gældende for w, altså $w = a + bi$. Derfor kan man bruge regnereglerne for komplekse tal til at løse en kompleks ligning.

$$z \xrightarrow{f(z)} w \ , \ \ z, w \in \mathbb{C}$$

$$z = x + yi \, , \ \ w = a + bi$$

$$w = a + bi = a(x + y) + b(x + y)i$$

Fraktaler

[7]En fraktal er en geometrisk figur, som i kontrast til klassiske geometriske figurer, er meget sammenfoldede eller hullede. En Fraktal indeholder tit de samme karakteristikker: Den er selv-similær (Ligesom to ligedannede trekanter kan se helheden af sig selv i hinanden kan selv-similære fraktaler se sig selv, i sig selv), den er rekursiv altså den refererer til sig selv i form af talfølger og den er detaljeret på uendeligt små skalaer. Fraktaler ses mange steder i naturen nævn ligt skyer, kystlinjer, Romanesco kål og træer. Mange fraktaler blev først fundet, eller udforsket efter computerens opfindelse.

[6] https://youtu.be/iUhwCfz18os
[7] Larsen, Mogens: Fraktal 2009

Mandelbrotmængden

[8]Mandelbrotmængden M er defineret som et sæt bestående af komplekse tal $\mathbb{C}$, den udtrykkes ved funktionen $f_c(z) = z^2 + c$, hvor funktionens kritiske bane ikke går mod uendelig.
En kritisk bane kan ses som en talfølge som skrives i Mandelbrotmængden skriver man talfølgen som: $f_c^n(z) = z^2 + c$ hvor $n \in \mathbb{N}$
Den kritiske bane kan derfor defineres som en talfølge $z_1,\ z_2,\ z_3$ ... hvor z er det komplekse output og input.

Funktionen har altså med et komplekst tal at gøre som input, funktionen giver også et komplekst tal tilbage som output.
Hvis man vil finde ud af hvilke tal som tilhører Mandelbrotmængden M, skal man itererer funktionen $f_c(z) = z^2 + c$.
At itererer betyder at man gentager en operation fra tidligere. Altså at man itererer den samme operation et antal gange. Et eksempel kunne være at man adderer 25, det kan vises med eksemplet som udtrykkes ved ligningen

$$x_{n+1} = x_n + 25$$

Her som eksempel bruger vi $x_0 = 10$ dvs. at $x_1 = 35$, $x_2 = 60$, $x_3 = 85$, ...
Altså skaber det en talfølge, hvor dette eksempels kritiske bane vil gå mod uendelig

skriver man talfølgen som: $f_c^n(z) = z^2 + c$ hvor $n \in \mathbb{N}$
Den kritiske bane kan derfor defineres som en talfølge $z_1,\ z_2,\ z_3$ ... hvor z selvfølgelig er det komplekse output og input.

[9]Mandelbrotmængden tager udgangspunkt i at $f_c^0(0) = 0^2 + c$ altså er det eneste man ændrer for ligningen den konstante værdi c.

[8] Lindstrøm, Jonas: Fraktaler
[9] Lindstrøm, Jonas: fraktaler

Eksempel 4.1

$c = 3$ gælder også som eksempel fordi at selvom $3 \in \mathbb{N}$ gælder $3 \in \mathbb{C}$ også

$$f_3^{\mathrm{n}}(0) = z^2 + c$$

$$f_3^1(0) = 0^2 + 3 = 3$$

$$f_3^1(0) = f_3(0) = 0^2 + 3 = 3$$

$$f_3^2 = f_3\left(f_3^1(0)\right) = 3^2 + 3 = 12$$

$$f_3^3 = f_3\left(f_3^2(0)\right) = 12^2 + 3 = 147$$

$$f_3^4 = f_3\left(f_3^3(0)\right) = 147^2 + 3 = 21612$$

$$f_3^5 = f_3\left(f_3^4(0)\right) = 21612^2 + 3 = 467078547$$

$$f_3^6 = f_3\left(f_3^5(0)\right) = 467078547^2 + 3 = 2{,}181624 \cdot 10^{17}$$

Sætning 4.1

[10]Lad $c \in \mathbb{C}$. Hvis $|f_c^n(0)| \geq 2$ for et n, så vil talfølgen eller den kritiske bane z_1, z_2, z_3 … være uendelig.

Det vil sige at alt uden for en cirkel med centrum i $(0{,}0)$ og en radius på 2 ligger altså ikke i M på noget tidspunkt

Så konstanten 3 tilhører altså ikke Mandelbrotmængden, fordi at den kritiske bane går mod uendelig, da $c > 2$

[10] Lindstrøm, Jonas: Fraktaler

$$f^{n}_{-0,65-0,24i}(0)$$

$$f^{1}_{-0,65-0,24i}(0) = 0^2 + (-0,65 - 0,24i) = -0,65 - 0,24i$$

$$f^{2}_{-0,65-0,24i}(-0,65 - 0,24i) = (-0,65 - 0,24i)^2 + (-0,65 - 0,24i) = -0,2851 + 0,072i$$

$$f^{3}_{-0,65-0,24i}(-0,2851 + 0,072i) = (-0,2851 + 0,072i)^2 + (-0,65 - 0,24i)$$
$$= -0,5739 - 0,28105i$$

$$f^{4}_{-0,65-0,24i}(-0,5739 - 0,28105i) = (-0,5739 - 0,28105i)^2 + (-0,65 - 0,24i)$$
$$= 0,39963 + 0,0826i$$

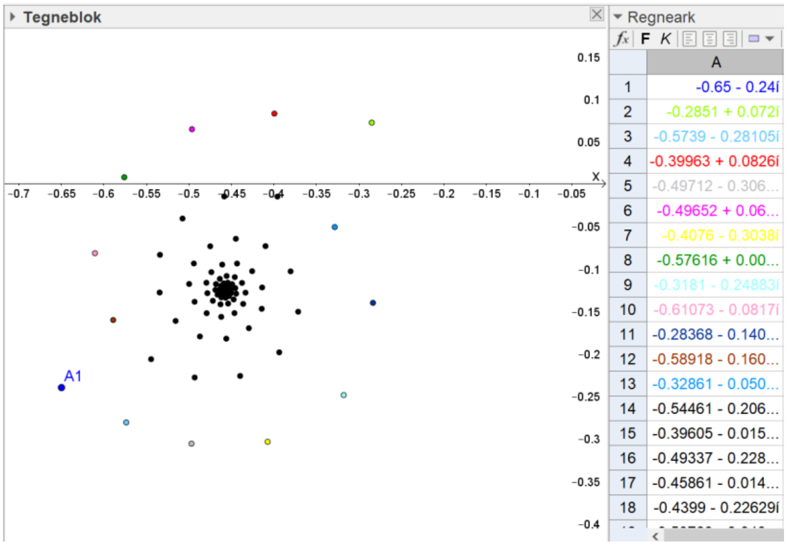
…

$$f^{100}_{-0,65-0,24i}(-0,45701 - 1,2674i) = (-0,45701 - 1,2674i)^2 + (-0,65 - 0,24i)$$
$$= -0,45721 - 0,12416i$$

Som man kan se, er det komplekse tal $-0,65 - 0,24i$'s modulus altså $|f^{n}_{-0,65-0,24i}|$ ikke er ≤ 2 gælder sætning 4.1. Det betyder altså at det komplekse tal $-0,65 - 0,24i \in M$, i hvert fald de første hundrede iterationer af det.

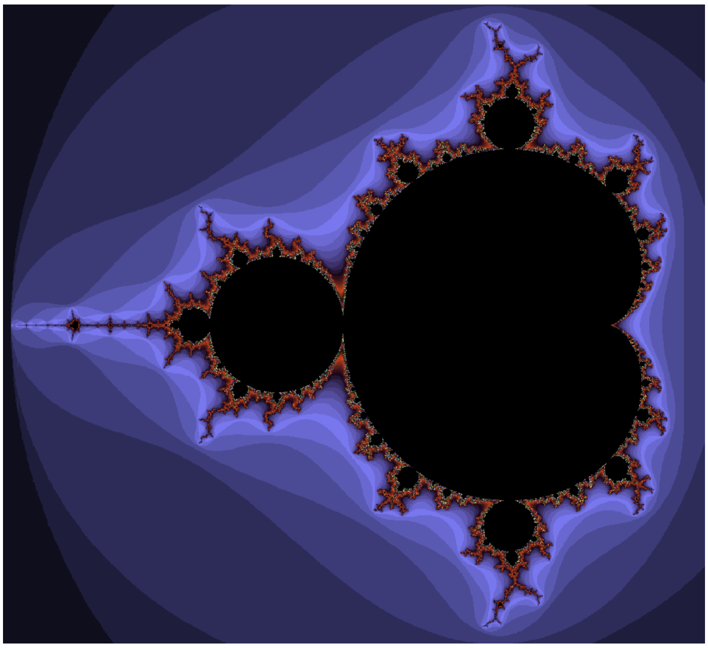
Eksempel 4.2

Figur 4.1 viser de første hundrede iterationer af $-0,65 - 0,24i$, figuren er konstrueret i programmet GeoGebra. Hvor de første 13 iterationer er farvet forskellige farver, så man kan få en ide om hvordan de komplicerede og uendeligt dybe mønstre bliver lavet, der er mange forskellige måder punkterne blive genereret på, ved forskellige steder på mandelbrot fraktalen. (se figur 4.1) Dette punkt ligger i den største sektion i Mandelbrotmængden, kaldet hoved kardioiden. En kardioiden er en figur som er hjerteformet.



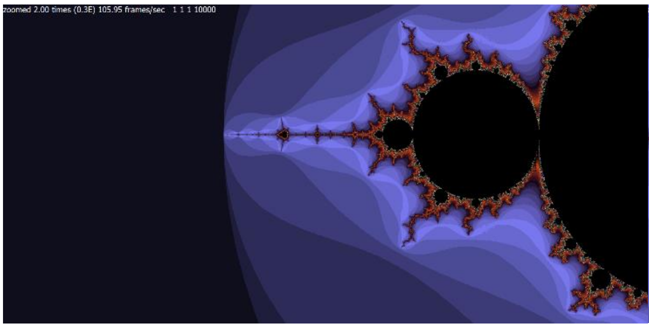
Figur 4.1

Den visuelle Mandelbrotmængde

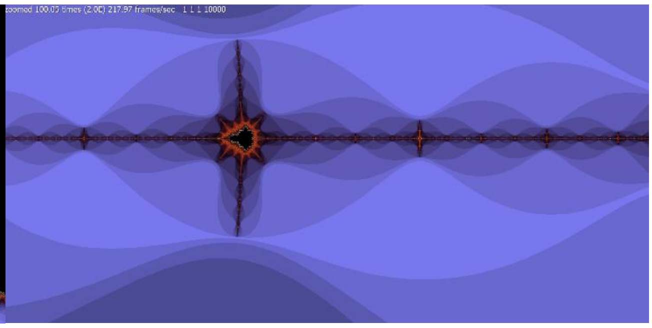


Dette er mandelbrot mængden visualiseret, i et koordinatsystem med en reel plan og en kompleks plan. Det er som man nok kan se et meget komplekst mønster, som selvfølgelig er opbygget af funktionen $f(z) = z^2 + c$. Lige præcis dette billede er konstrueret med 1000 iterationer, på overfladen ser det nok ikke ud til at divergere til andre mønstre, men der tager man grueligt fejl.

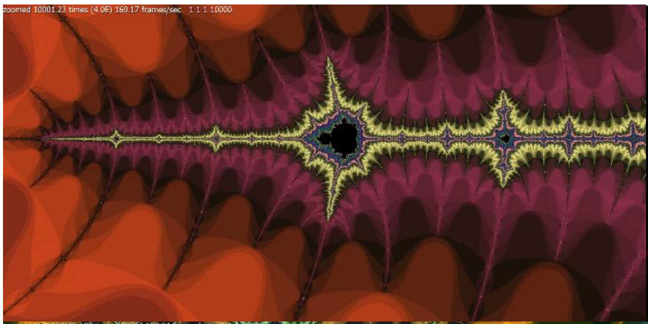
Zoomet $2x$



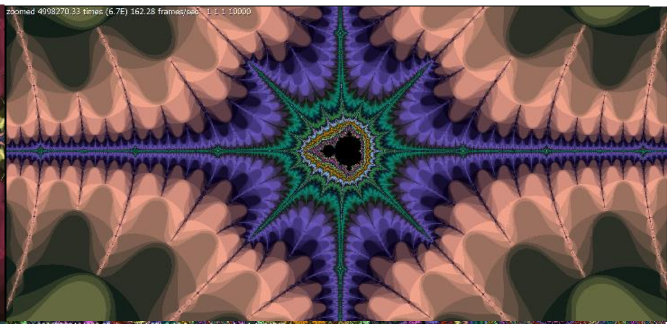
Zoomet $100x$



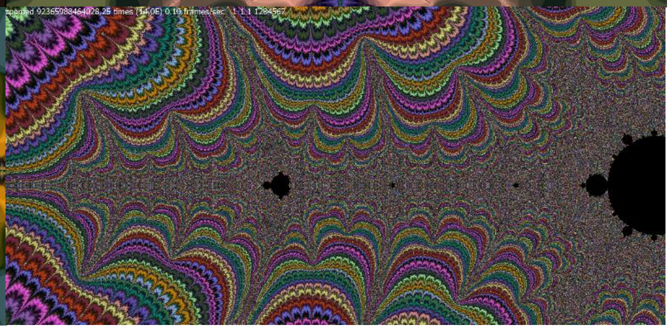
Zoomet $10.000x$



Zoomet $500.000x$



Zoomet $15.000.000.000x$ $(15\ milliarder)$



Zoomet $92.000.000.000.000x(92\ billioner)$

Farverne på Mandelbrotmængden er defineret af hvor mange iterationer det tager før den kritiske bane går mod uendelig, altså hvor sikker man er på at et punkt tilhører M.

efter den første iteration, vil man kun kunne se en sort cirkel af punkter som tilhører Mandelbrotmængden rundt om origo med en radius på 2, det er i bund og grund det som sætning 4.1. viser. Den anden iteration man laver, er så funktionen $f(z) = z^2 + c$ brugt på alle tallene inden for den første iterations cirkel. Den proces kan man gentage uendeligt mange gange, men allerede efter 10 iterationer kan man se den største version af Mandelbrotmængden. De overstående billeder er alle lavet med $20.000.000$ $(20\ millioner)$ iterationer.

Man kan tydeligt se på de overstående billeder at Mandelbrotmængden som en fraktal er selv-similær, den er også genereret ved brug af talfølger og derfor er rekursiv.

[11]Mandelbrotmængden skulle man tro var stabil og fast, men den er faktisk tæt knyttet til kaos. På den måde at hvis man bare flytter på et decimal ud af lad os bare

[11] Lindstrøm, Jonas: Fraktaler

sige et tal med ti decimaler, f.eks. ændre 0,5000000000 til 0,5000000001 har det kæmpe konsekvenser for hvornår tallet går mod uendelighed vis man indsætter det som c i funktionen $f(z) = z^2 + c$. Når man zoomer ind på fraktalen, flyver man forbi uendeligt mange c værdier som bare for tusind iterationer siden tilhørte M, men nu er blevet kaotiske og er gået mod uendelighed.

Konklusion

Jeg kan nu konkludere at fraktaler er så interessante som de ser ud, de er kaotiske, selv-similære og generelt spændene at fordybe sig i. Jeg har defineret regneregler så som at adderer og multiplicerer med komplekse tal. Jeg har introduceret relevante begreber så som iterationer og lært hvordan man afbilder komplekse tal som koordinater på den reelle og imaginære plan. Jeg har fundet ud af hvordan man kan bruge komplekse funktioner, til at finde frem til hvilke værdier der tilhører Mandelbrotmængden og i hvor lang tid. Jeg kan konkludere at fraktaler er Mandelbrotmængden opfører sig kaotisk men stadig ordentligt. Hvis jeg havde noget mere tid, ville jeg nok undersøger andre fraktaler så som Sierpinski trekanten, som opstår mange steder i matematik. F.eks. Pascals trekant hvor hvis man markerer alle tal som tilhører 2-tabellen vil det vise Sierpinskis trekant. Eller de forskellige potenser af Mandelbrotmængden, altså $f(z) = z^3 + c$, $f(z) = z^4 + c$ osv.

Litteraturliste

Alle figurer har jeg konstrueret I hhv. GeoGebra og Xaos

Adams, Robert: Calculus a complete course (fifth edition) 2003

Lindstrøm, Jonas: Fraktaler: *Mandelbrots mængde*. Aarhus universitet
https://www.jonaslindstrom.dk/wp-content/uploads/2014/05/fraktaler.pdf

Carstensen, Jens: Komplekse tal 3. udgave. Systime 1996

Carstensen, Jens: Komplekse tal 2. rev. Udgave. Systime 1987

https://youtu.be/iUhwCfz18os set 07/03/2022

Larsen, Mogens: Fraktal. Den store danske. 2009
https://denstoredanske.lex.dk/fraktal